

MATLETYKA

Wytrenuj matkę

Teoria do działu 1

Liczby rzeczywiste

dla Zuzy

1. Cechy podzielności
2. Dzielniki, liczby pierwsze, NWD i NWW
3. Ułamki i znaki: liczenie bez pomyłek
4. Które liczby są niewymierne?
5. Ułamki okresowe i zaokrąglanie
6. Pierwiastki kwadratowe w praktyce
7. Pierwiastek sześcienny i wyższe stopnie
8. Potęgi i ich prawa
9. Ujemny wykładnik, bardzo duże i bardzo małe liczby
10. Ułamek w wykładniku
11. Ściągą: najważniejsze wzory

1. Cechy podzielności

Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy jej ostatnia cyfra to 0, 2, 4, 6 lub 8,
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4,
- 5, gdy jej ostatnia cyfra to 0 lub 5,
- 8, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8,
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
- 10, gdy jej ostatnia cyfra to 0.

Podzielność przez liczby złożone sprawdzamy, rozbijając je na czynniki bez wspólnych dzielników:

- przez 6: podzielna przez 2 i przez 3,
- przez 12: podzielna przez 3 i przez 4 (nie wystarczy 2 i 6!),
- przez 15: podzielna przez 3 i przez 5.

Przykład

69 222: ostatnia cyfra parzysta, suma cyfr $6 + 9 + 2 + 2 + 2 = 21$ dzieli się przez 3, więc $6 \mid 69\,222$. Ale 22 nie dzieli się przez 4, więc $4 \nmid 69\,222$, a zatem także $12 \nmid 69\,222$.

Dodatkowe cechy, które warto znać:

- przez 25: dwie ostatnie cyfry to 00, 25, 50 lub 75,
- przez 100: dwie ostatnie cyfry to 00.

Przykład

Czy 123 456 dzieli się przez 8? Trzy ostatnie cyfry: $456 = 8 \cdot 57$, więc tak.

Jaką cyfrę wstawić w $3a18$, aby liczba dzieliła się przez 9? Suma cyfr $3 + a + 1 + 8 = 12 + a$ ma dzielić się przez 9, więc $a = 6$.

Uwaga! Cechy z sumą cyfr działają tylko dla 3 i 9. Dla 4, 8, 25 patrzemy na końcówkę liczby, a nie na sumę cyfr.

2. Dzielniki, liczby pierwsze, NWD i NWW

Liczby naturalne to $0, 1, 2, 3, \dots$. Jest ich nieskończenie wiele: po każdej liczbie n jest następna $n + 1$. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Definicja: dzielnik

Niech m i n będą liczbami naturalnymi, $m \neq 0$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Mówimy wtedy, że n jest **podzielna** przez m albo że n jest **wielokrotnością** liczby m .

- zapis $3 \mid n$ czytamy: „3 dzieli n ”,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: „7 nie dzieli n ”.

Warto zapamiętać:

- 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład

Dzielniki liczby 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. Szukamy ich parami: $1 \cdot 54$, $2 \cdot 27$, $3 \cdot 18$, $6 \cdot 9$.

Liczby parzyste i nieparzyste

Definicja

Jeśli $2 \mid n$, to n jest **parzysta**. Jeśli $2 \nmid n$, to n jest **nieparzysta**.

Liczba parzysta ma postać $2k$, a nieparzysta postać $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Kolejne liczby parzyste: $2k$, $2k + 2$, $2k + 4, \dots$; kolejne nieparzyste: $2k + 1$, $2k + 3$, $2k + 5, \dots$

Dzielenie z resztą

Dzieląc 47 przez 3, otrzymujemy 15 i resztę 2, czyli $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Twierdzenie

Każdą liczbę naturalną n można zapisać w postaci

$$n = m \cdot k + r, \quad \text{gdzie } r \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Liczba r to **reszta** z dzielenia n przez m . Gdy $r = 0$, to $m \mid n$.

Przykład

Przy dzieleniu przez 3 każda liczba ma postać $3k$, $3k+1$ lub $3k+2$: $26 = 3 \cdot 8 + 2$, $108 = 3 \cdot 36$, $127 = 3 \cdot 42 + 1$.

Przy dzieleniu przez 4: $4k$, $4k+1$, $4k+2$ lub $4k+3$: $79 = 4 \cdot 19 + 3$.

Liczby pierwsze i złożone

Definicja

Liczbę naturalną, która ma **dokładnie dwa** dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

- Liczby pierwsze mniejsze od 50: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 2 to jedyna parzysta liczba pierwsza.
- 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.
- Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele (udowodnił to Euklides).

Rozkład na czynniki pierwsze

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Taki rozkład jest jeden (z dokładnością do kolejności czynników).

Przykład

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Wygodny zapis „w słupku”: dzielimy przez kolejne liczby pierwsze, aż dojdziemy do 1. Wynik: $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

NWD i NWW

Definicja

$\text{NWD}(x,y)$ to największy wspólny dzielnik liczb x i y .

$\text{NWW}(x,y)$ to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x i y (dodatnia).

Jak liczyć z rozkładu na czynniki pierwsze:

- **NWD:** mnożymy czynniki **wspólne** (każdy tyle razy, ile występuje w obu rozkładach),
- **NWW:** bierzemy cały rozkład jednej liczby i **dopisujemy brakujące** czynniki drugiej.

Przykład

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{NWD}(120,54) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{NWW}(120,54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$$

Twierdzenie

$$\text{NWD}(x,y) \cdot \text{NWW}(x,y) = x \cdot y. \quad \text{Sprawdzenie: } 6 \cdot 1080 = 6480 = 120 \cdot 54.$$

Jeśli x i y nie mają wspólnych czynników pierwszych (są **względnie pierwsze**), to $\text{NWD}(x,y) = 1$ i $\text{NWW}(x,y) = x \cdot y$.

3. Ułamki i znaki: liczenie bez pomyłek

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie $1, 2, 3, \dots$, liczby do nich przeciwne $-1, -2, -3, \dots$ oraz 0 . Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbb{Z}$.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb całkowitych zawsze daje liczbę całkowitą. Dzielenie nie zawsze: $(-3) : (-2) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Działania na ułamkach zwykłych

- Liczba mieszana $\rightarrow$ ułamek: $2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$.
- Ułamek niewłaściwy $\rightarrow$ liczba mieszana: $\frac{19}{5} = \frac{15 + 4}{5} = 3\frac{4}{5}$.
- Dodawanie i odejmowanie: najpierw **wspólny mianownik** (najlepiej NWW mianowników).
- Mnożenie: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik. Liczby mieszane zamieniamy najpierw na ułamki niewłaściwe.
- Dzielenie: mnożymy przez **odwrotność** dzielnika.

Znaki przy mnożeniu i dzieleniu

- $(+) \cdot (+) = (+)$, $(-) \cdot (-) = (+)$, $(+) \cdot (-) = (-)$, tak samo przy dzieleniu.
- Parzysta liczba minusów w iloczynie daje wynik dodatni, nieparzysta ujemny.
- Odejmowanie liczby ujemnej to dodawanie: $-47 - (-63) = -47 + 63 = 16$.

Kolejność wykonywania działań

1. Nawiasy (od najbardziej wewnętrznego).
2. Potęgowanie i pierwiastkowanie.
3. Mnożenie i dzielenie (od lewej do prawej).
4. Dodawanie i odejmowanie (od lewej do prawej).

Definicja: liczba wymierna

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi i $n \neq 0$, nazywamy liczbami wymiernymi. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.

Każda liczba całkowita jest wymierna, bo np. $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$.

Skracanie i rozszerzanie ułamków

- **Skracanie:** dzielimy licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od 0: $\frac{180}{480} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$.
- Ułamek, którego nie da się już skrócić, to ułamek **nieskracalny**. Jego licznik i mianownik są **względnie pierwsze**.
- Najszybciej: skracamy przez NWD licznika i mianownika.
- **Rozszerzanie:** mnożymy licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od 0. Używamy, gdy potrzebny jest wspólny mianownik.

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0)$$

Przykład

$\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$: NWW(12,18) = 36, więc $\frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{1}{36}$. Gdyby wziąć wspólny mianownik $12 \cdot 18 = 216$, wynik byłby ten sam, ale trzeba by go jeszcze skracać.

Liczba przeciwna i odwrotna

- Liczba **przeciwna** do a to $-a$ (suma daje 0).
- Liczba **odwrotna** do $a \neq 0$ to $\frac{1}{a}$ (iloczyn daje 1). Odwrotność $\frac{a}{b}$ to $\frac{b}{a}$; odwrotność $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ to $\frac{3}{7}$. Liczba 0 nie ma odwrotności.

Ułamki piętrowe

Ułamek piętrowy to dzielenie licznika przez mianownik. Najpierw liczymy osobno „górze” i „dół”, potem dzielimy:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

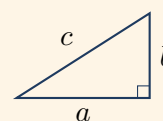
Uwaga! Określenia **dzielnik** używamy też dla liczb całkowitych: dzielniki liczby -6 to $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

4. Które liczby są niewymierne?

Twierdzenie: Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Kwadrat o boku 1 ma przekątną c : $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, więc $c = \sqrt{2}$. Liczby $\sqrt{2}$ nie da się zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{k}$ o całkowitym liczniku i mianowniku.

Definicja: liczba niewymierna

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy liczbami niewymiernymi.

Twierdzenie

Dla liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (gdy n jest kwadratem liczby naturalnej, np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{82}$). Analogicznie $\sqrt[n]{n}$: $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest niewymierny.

Inne liczby niewymierne: $\pi, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (przekątna pięciokąta foremnego o boku 1).

Działania z liczbami niewymiernymi

- wymierna + niewymierna = niewymierna: $3 + \sqrt{7}, \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}$,
- wymierna $\neq 0$ · niewymierna = niewymierna: $\frac{1}{5}\sqrt{13}, 2\sqrt{3}$.

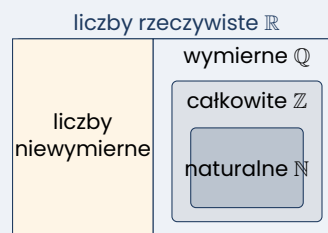
Uwaga! Suma lub iloczyn dwóch liczb niewymiernych może być wymierny: $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. Zawsze najpierw upraszczamy: $10 + \frac{2}{3}\sqrt{9} = 10 + 2 = 12$ to liczba wymierna.

Definicja: liczby rzeczywiste

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lub $I\mathbb{Q}$.



Jeśli nie napisano inaczej, przez „liczbę” rozumiemy liczbę rzeczywistą.

5. Ułamki okresowe i zaokrąglanie

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... (potęgach liczby 10) to **ułamki dziesiętne**: $\frac{15}{100} = 0,15$, $\frac{37}{1000} = 0,037$, $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Aby otrzymać postać dziesiętną liczby wymiernej, **dzielimy licznik przez mianownik** (pisemnie) albo **rozszerzamy** ułamek do mianownika 10, 100, 1000...:

$$\frac{6}{25} = \frac{6 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{24}{100} = 0,24 \qquad \frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25$$

Rozwinięcie okresowe

$$\frac{1}{6} = 0,1666 \dots = 0,1(6), \qquad \frac{4}{7} = 0,571428\,571428 \dots = 0,(571428).$$

- Nawias oznacza grupę cyfr powtarzającą się w nieskończoność. Najkrótszą taką grupę nazywamy **okresem**, a liczbę jej cyfr **długością okresu**.
- Rozwinięcie z okresem nazywamy **okresowym**.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej **skończonej** lub **nieskończonej okresowej**. Każde rozwinięcie okresowe przedstawia liczbę wymierną. Rozwinięcia nieskończone **nieokresowe** przedstawiają liczby niewymierne, np. $0,1010010001 \dots$, $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$, $\pi = 3,14159 \dots$

Twierdzenie: kiedy rozwinięcie jest skończone

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy mianownik n jest iloczynem samych czynników 2 i 5.

Przykład

$\frac{7}{40} : 40 = 2^3 \cdot 5$, więc rozwinięcie skończone (0,175). $\frac{5}{6} : 6 = 2 \cdot 3$, jest czynnik 3, więc okresowe (0,8(3)).

Najpierw skracamy! $\frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0,1$, choć 30 ma czynnik 3.

Cyfra na n -tym miejscu po przecinku

Dla $0,(1234)$ (okres 4 cyfry) cyfra na 10. miejscu: $10 = 4 \cdot 2 + 2$, więc to 2. cyfra okresu, czyli 2.
Na 20. miejscu: $20 = 4 \cdot 5 + 0$, reszta 0 oznacza ostatnią cyfrę okresu, czyli 4.

Gdy okres nie zaczyna się zaraz po przecinku (np. $0,32(1410)$), najpierw odejmujemy cyfry przed okresem: na 20. miejscu liczymy $20 - 2 = 18 = 4 \cdot 4 + 2$, więc 2. cyfra okresu, czyli 4.

Zamiana ułamka okresowego na zwykły

Przykład

Przedstaw $0,(12)$ w postaci ułamka zwykłego.

$$x = 0,121212 \dots$$

$$100x = 12,121212 \dots$$

mnożymy przez 100, bo okres ma 2 cyfry

$$100x = 12 + x$$

$$99x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Mnożymy przez 10, 100, 1000 ..., tak aby przecinek „przeskoczył” o cały okres. Gdy przed okresem są inne cyfry (np. $2,1(52)$), najpierw mnożymy przez 10, żeby okres zaczął się zaraz po przecinku.

Uwaga! $0,(9) = 1$, bo $10x = 9 + x$, czyli $9x = 9$.

Przybliżenia i zaokrąglanie

Definicja: przybliżenie

Liczba x jest przybliżeniem liczby a z dokładnością do d , jeśli a i x różnią się o nie więcej niż d . Na przykład 1,414 jest przybliżeniem $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

Reguła zaokrąglania: odrzucamy końcowe cyfry i patrzymy na pierwszą odrzuconą cyfrę:

- 0,1,2,3,4: ostatnia zachowana cyfra bez zmian,
- 5,6,7,8,9: ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1.

Przykład

$6,9874 \approx 6,987$ (3 miejsca), $\approx 6,99$ (2 miejsca), $\approx 7,0$ (1 miejsce).

$9,99625 \approx 10,00$ (2 miejsca): przeniesienie „idzie” przez wszystkie dziesiątki.

- Przybliżenie z niedomiarem: mniejsze od liczby ($\pi \approx 3,14$).
- Przybliżenie z nadmiarem: większe od liczby ($\pi \approx 3,1416$).

6. Pierwiastki kwadratowe w praktyce

Definicja: pierwiastek kwadratowy

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a :

$$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

- $\sqrt{25} = 5$, bo $5^2 = 25$; $\sqrt{0,16} = 0,4$; $\sqrt{0} = 0$.
- $\sqrt{36} \neq -6$, choć $(-6)^2 = 36$, bo pierwiastek kwadratowy jest nieujemny.
- $\sqrt{-4}$ nie istnieje w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Geometrycznie: bok kwadratu o polu P ma długość $a = \sqrt{P}$.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a : $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$ czyli $\sqrt{a^2} = |a|$.

Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$.

Pierwiastek iloczynu i ilorazu ($a \geq 0, b \geq 0$, przy dzieleniu $b > 0$)

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład

$$\sqrt{49 \cdot 144} = 7 \cdot 12 = 84, \quad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4, \quad \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{9} = 3.$$

Uwaga! Dla sumy i różnicy takiego wzoru nie ma: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, a $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
Czyli $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Pierwiastki na rozgrzewkę

- $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$; $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$, bo $(\frac{6}{11})^2 = \frac{36}{121}$; $\sqrt{0,09} = 0,3$, bo $0,3^2 = 0,09$.
- $\sqrt[3]{216} = 6$, bo $6^3 = 216$; $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$, bo $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$; $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$, bo $0,1^3 = 0,001$.
- Pod pierwiastkiem z liczby mieszanej najpierw zamieniamy na ułamek: $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Wyłączanie czynnika przed pierwiastek

Szukamy pod pierwiastkiem największego kwadratu liczby naturalnej (4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...):

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \qquad \sqrt{450} = \sqrt{225 \cdot 2} = 15\sqrt{2}$$

Dzięki temu można dodawać pierwiastki, które „wyglądają inaczej”: $\sqrt{18} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$. Dodajemy tylko wyrazy z tym samym pierwiastkiem, tak jak $3x + 7x = 10x$.

Włączanie czynnika pod pierwiastek

Liczbę przed pierwiastkiem podnosimy do kwadratu i wpisujemy pod pierwiastek:

$$5\sqrt{5} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{125} \qquad \frac{1}{3}\sqrt{27} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 27} = \sqrt{3}$$

Przydaje się do porównywania liczb: $5\sqrt{5} = \sqrt{125}$ i $11 = \sqrt{121}$, więc $5\sqrt{5} > 11$.

Usuwanie niewymierności z mianownika

Mnożymy licznik i mianownik przez pierwiastek z mianownika:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Szacowanie pierwiastków

$\sqrt{35}$ leży między $\sqrt{25} = 5$ a $\sqrt{36} = 6$, więc $5 < \sqrt{35} < 6$.

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, a $9 < 12 < 16$, więc $3 < 2\sqrt{3} < 4$.

Kwadraty liczb 11–25 (warto znać na pamięć)

$$\begin{array}{llllllll} 11^2 = 121 & 12^2 = 144 & 13^2 = 169 & 14^2 = 196 & 15^2 = 225 & 16^2 = 256 & 17^2 = 289 & 18^2 = 324 \\ 19^2 = 361 & 20^2 = 400 & 21^2 = 441 & 22^2 = 484 & 23^2 = 529 & 24^2 = 576 & 25^2 = 625 & \end{array}$$

7. Pierwiastek sześcienny i wyższe stopnie

Definicja: pierwiastek sześcienny

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a :

$$\sqrt[3]{a} = b \iff b^3 = a$$

- $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.
- W odróżnieniu od kwadratowego, pierwiastek sześcienny istnieje także z liczb ujemnych: $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$. Ogólnie $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.
- Geometrycznie: krawędź sześcianu o objętości V ma długość $a = \sqrt[3]{V}$ (np. $V = 27 \Rightarrow a = 3$).

Własności pierwiastka sześciennego

$$\sqrt[3]{a^3} = a \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a \qquad \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$$

Przykład

$$\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7, \quad \frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{343} = 7.$$

Wyłączanie: $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = 5\sqrt[3]{4}$ (szukamy sześciątów: 8, 27, 64, 125, 216, ...).

Włączanie: $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$.

Usuwanie niewymierności: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ (domnażamy, aby pod pierwiastkiem powstał sześciąt).

Pierwiastek n -tego stopnia**Definicja**

Jeśli n jest parzyste, to dla $a \geq 0$:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli n jest nieparzyste, to dla każdej liczby a :

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Przykład

$\sqrt[8]{256} = 2$, bo $2^8 = 256$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[9]{-512} = -2$, bo $(-2)^9 = -512$; $\sqrt[4]{-16}$ nie istnieje.

Włączanie: $2\sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120}$.

Sześciiany liczb (warto znać na pamięć)

$$1^3 = 1 \quad 2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125 \quad 6^3 = 216 \quad 7^3 = 343 \quad 8^3 = 512 \quad 9^3 = 729 \quad 10^3 = 1000 \quad 11^3 = 1331$$

8. Potęgi i ich prawa**Definicja: potęga**

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

a to podstawa potęgi, n to wykładnik. Przyjmujemy też: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$. Wartości 0^0 nie definiujemy.

Przykład

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad (-3)^1 = -3, \quad 16^0 = 1.$$

Króliki: para podwaja się co pół roku, po 5 latach (10 okresów) jest ich $2 \cdot 2^{10} = 2^{11} = 2048$.

Znak potęgi liczby ujemnej

- Liczba ujemna do potęgi **parzystej** daje wynik **dodatni**: $(-2)^4 = 16$.
- Liczba ujemna do potęgi **nieparzystej** daje wynik **ujemny**: $(-2)^5 = -32$.

Uwaga! Nawias ma znaczenie! $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, ale $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$.

Uwaga! Dla liczby z przedziału $(0,1)$ wyższa potęga daje **mniejszy** wynik: $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Prawa działań na potęgach ($a, b \neq 0$; m, n naturalne)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Przykład

$$2^2 \cdot 2^6 = 2^8, \quad 3^9 : 3^5 = 3^4 = 81, \quad (2^2)^3 = 2^6 = 64, \quad 2^6 \cdot 5^6 = 10^6, \quad 12^4 : 4^4 = 3^4 = 81.$$

Uwaga na różnicę: $(2^2)^3 = 2^6$, ale $2^{2^3} = 2^8$. I nie ma wzoru na sumę: $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$, a nie 2^6 .

Potęgi, które warto rozpoznawać

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729				
4^n	4	16	64	256	1024					
5^n	5	25	125	625						

9. Ujemny wykładnik, bardzo duże i bardzo małe liczby

Definicja: potęga o wykładniku ujemnym

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i liczby $a \neq 0$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład

$$3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad 3^{-2} = \frac{1}{9}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9, \quad 0,2^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25.$$

Twierdzenie: skrót

Ujemny wykładnik „odwraca” ułamek: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Minus w wykładniku nie zmienia znaku liczby: $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$.

Wszystkie prawa działań na potęgach z tematu 8 obowiązują także dla wykładników całkowitych (ujemnych i zera), np. $3^9 \cdot 3^{-6} = 3^3 = 27$, $5^{-9} : 5^{-11} = 5^2 = 25$, $(2^5)^{-2} = 2^{-10}$.

Sprowadzanie do wspólnej podstawy

Liczby zapisujemy jako potęgi tej samej podstawy, np. $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $\frac{1}{64} = 2^{-6}$, $0,001 = 10^{-3}$:

$$4^{-5} \cdot 8^2 = (2^2)^{-5} \cdot (2^3)^2 = 2^{-10} \cdot 2^6 = 2^{-4}$$

Notacja wykładnicza

Definicja: notacja wykładnicza

Liczbę dodatnią a można zapisać w postaci

$$a = x \cdot 10^n, \quad \text{gdzie } 1 \leq x < 10, n \in \mathbb{Z}.$$

- Duże liczby: przecinek przesuwamy w lewo, wykładnik dodatni: $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$.
- Małe liczby: przecinek przesuwamy w prawo, wykładnik ujemny: $0,00000097 = 9,7 \cdot 10^{-7}$.
- Wykładnik mówi, o ile miejsc przesunęliśmy przecinek.

Przykład

$$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} = 2,6 \cdot 10^2 = 260.$$

Gdy liczba z przodu wyjdzie spoza przedziału $[1,10)$, poprawiamy: $34 \cdot 10^5 = 3,4 \cdot 10^6$, $0,6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^2$.

10. Ułamek w wykładniku

Definicja: wykładnik $\frac{1}{n}$

Dla $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7, \quad 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \quad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Definicja: wykładnik $\frac{m}{n}$

Dla $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m :

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Mianownik wykładnika to stopień pierwiastka, licznik to potęga. Najwygodniej najpierw pierwiastkować (mniejsze liczby), potem potęgować:

Przykład

$$9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27, \quad 8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4, \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}.$$

Wykładnik dziesiętny zamieniamy na ułamek: $16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$, $4^{2,5} = 4^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$.

Ujemny wykładnik i ułamek: $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} = (\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Prawa działań (x, y wymierne; $a, b > 0$)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Przykład

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^2 = 9, \quad 6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^1 = 6, \quad 8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = 4^5 = 1024.$$

Pierwiastek jako potęga

Każdy pierwiastek można zapisać jako potęgę, co ułatwia mnożenie różnych pierwiastków:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{7}} = 7^{-\frac{1}{2}}, \quad 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}, \quad 49\sqrt{7} = 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{2}}$$

Uwaga! Potęgę o wykładniku wymiernym niecałkowitym definiujemy tylko dla dodatniej podstawy ($a \geq 0$ przy $\frac{1}{n}$). Ułamki dziesiętne zamieniamy na zwykłe: $0,04^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

Ściąga: najważniejsze wzory

Zbiory liczbowe

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

wymierne: $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

niewymierne: rozwinięcie nieskończone
nieokresowe

Podzielność

parzysta $2k$, nieparzysta $2k + 1$

$$n = m \cdot k + r, \quad 0 \leq r < m$$

$$\text{NWD}(x, y) \cdot \text{NWW}(x, y) = x \cdot y$$

Rozwinięcie dziesiętne

skończone $\iff$ mianownik (po skróceniu) ma tylko czynniki 2 i 5

$$0, (ab) = \frac{ab}{99}, \quad 0, (abc) = \frac{abc}{999}$$

Pierwiastek kwadratowy

$$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a, \quad b \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{a}$$

Pierwiastek sześcienny i n -tego stopnia

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad (\text{także } a < 0)$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

n parzyste: tylko $a \geq 0$, wynik ≥ 0

Potęgi

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(-a)^{\text{parzysta}} > 0, \quad (-a)^{\text{nieparzysta}} < 0$$

$$(-3)^2 = 9, \quad \text{ale } -3^2 = -9$$

Notacja wykładnicza

$$a = x \cdot 10^n, \quad 1 \leq x < 10, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Zaokrąglanie

pierwsza odrzucona cyfra 0-4: bez zmian

pierwsza odrzucona cyfra 5-9: +1

Twierdzenie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

przekątna kwadratu: $a\sqrt{2}$